양자 프로그래밍
Quantum Programming

이광근
프로그래밍 연구실
ropas.snu.ac.kr
서울대학교

SIPL LiComR winter school @ 만리포 2/12/2004

전공: 프로그램 분석

- 프로그램 분석(program static analysis) = 실행전에 실행성질을 자동으로 안전하게 어림잡는 일반적인 방법
  - “실행전”: 프로그램을 돌리기 전에
  - “실행성질”: 실행중의 프로그램 성질
  - “자동으로”: 프로그램이 프로그램을 분석
  - “안전하게”: 모든 실제상황을 포섭
  - “어림잡는”: 군더더기가없을 순 없다
  - “일반적인”: 가능한 언어와 실행성질이 무제한

왠 양자 프로그래밍?

- 궁금
- 지금은 아마도 양자컴퓨터의 1930년대
  - 양자 프로그래밍 언어및 프로그래밍 시스템?
  - 프로그래밍 언어/프로그램 분석 기술을 발판으로
- "통계적 프로그램 분석" "statistical static analysis"
  - 분석은 반드시 안전(sound)해야 한다?
    - 안전성을 포기하는 분석이 유용할 수 도
    - 2시간 분석후 "100% 확신하는 데, 버그 없다" 대신에
    - 2초 분석후 "100% 확신하는 데, 버그 있거나 없다" 대신에
    - 2초 분석후 "99% 확신하는 데, 버그 없다."
  - 양자 프로그램의 의미(분석)는 근본적으로 확률적이다

양자 컴퓨터의 능력/성질

- 하나가 동시에 두 상태를 가질 수(superposition)
  - 한 비트가 0과 1을 동시에 가질 수 있다
  - n개의 비트가 한 순간 최대 2^n 개 상태를 가질 수 있다!
- 완벽한 블랙박스
  - 양자 데이터는 박스 안에
  - 외부에서는 연산 함수만 쏴 준다
  - 외부에서 결과를 처다보려는 순간 중첩은 사라진다
- 두개가 완벽히 엮일 수(entanglement)
  - 한 비트가 0으로 관찰되면 다른 하나는 반드시 1로 관찰된다! 혹은 그 반대로.

수학적인 모델(1/4)
Quantum State

- a quantum state = a vector in a Hilbert space(complex vector space F^n for some n5Q)
- quantum bit(qbit) state:
  – a0› b1 or vector (a,b)
  – “amplitudes” a,b 5 F and |a|^2 + |b|^2 = 1
  – |a|^2 and |b|^2 are the probabilities for 0 and 1
- one-qbit state is a vector (a, b)
- two-qbit state is a vector (a, b, c, d)
- n-qbit state is a vector of length 2^n

a one-qbit state

states	amplitude	probability
0	0.3 + 0.3i	0.18
1	0.9 + 0.1i	0.82

Above two states are superposed in one qbit with the probabilities.

/

“amplitude” denotes also the two square roots $\pm\sqrt{0.18}$f the probability.

a three-qbit state

states	amplitude	probability
000	0.37 + 0.04i	0.14
001	0.11 + 0.18i	0.04
010	0.09 + 0.31i	0.10
011	0.30 + 0.30i	0.18
100	0.40 + 0.01i	0.16
101	0.35 + 0.43i	0.31
110	0.09 + 0.12i	0.02
111	0.15 + 0.16i	0.05

Above 8 states are superposed
in three qbits with the probabilities.

///

quantum state = vector

- q = a0 › b1 를 벡터 (a,b) 로 표현
- q = a00 › b01 › c10 › d11 를 벡터 (a,b,c,d)로 표현
- q = 크기가 $2, 2^2, 2^3, \ldots$ 인 벡터들

수학적인 모델(2/4)
Quantum Entanglement

- 두개의 독립적인 qbit (a,b)와 (v,w)가 합쳐지면 2-qbit 는
  - (av, aw, bv, bw) = (a,b) $\otimes$ (v,w)
- 두개의 qbit이 완벽하게 엮겼다는 것은, 그것들이 두개의 qbit으로 쪼개지지 못하는 경우를 말한다
  - $(1/\sqrt{2}, 0, 0, 1/\sqrt{2}) \neq (a,b) \otimes (v,w)$
  - 첫 qbit과 두번째 qbit은 항상 같도록 엮겨있다.

수학적인 모델(3/4)
Quantum Operations

- quantum state transitions = linear and unitary transformations T

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

- "linear": operators are matrices
- "unitary": the unit probability is preserved
- for n-qbit states, a quantum operator is a unitary 2^n X 2^n matrix over $\mathbb{F}$

basic quantum gates

N, Nc, H, Hc, V, Vc, W, Wc, X

- not, Hadamard, phase changes, controlled-ops, exchange
- H(1,0) = uniform superposition $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- Nc (($\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$)$\otimes$(1,0)) = entangled bits ($\frac{1}{\sqrt{2}}$,0,0,$\frac{1}{\sqrt{2}}$)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{i} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix}$$

compound quantum operations

- initialize to the uniform superposition of n qbits: ($\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$), ($\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$)
- phase flips: (a,b) $\mapsto$ $(\overline{a,b})$
- entangle: ($\frac{1}{\sqrt{2}}$,0,0, $\frac{1}{\sqrt{2}}$)
- Fourier transform: computing period
- an operation can be simultaneously applied to multiple qbits
- H,Vc,X can make any unitary transform

수학적인 모델(4/4)
Measurement

- 양자비트 값을 읽는 순간 중첩된 것 중에 하나만 관찰된다.
  - 중첩된 모든 것을 관찰할 순 없다
  - 확률에 따라 하나만 볼 수 있다
- 엮여있는 양자비트는 짝의 관찰 결과에 따라 엮긴다
- 읽혀진 후에는 양자 컴퓨팅은 불가능하다.

a00 + b01 + c10 + d11

$|a|^2+|b|^2$ a00 + b01

$|c|^2+|d|^2$ c10 + d11

$|d|^2/(|c|^2+|d|^2)$

00 01 10 11

양자 프로그래밍 스텝
Steps in Quantum Programming

1. initialize qbits: superposition, entanglement, etc.
2. transform by unitary operations
3. measure

$¤¤\ldots¤¤ \xrightarrow[1]{} \Phi\Phi\cdots\Phi\Phi \xrightarrow[2]{+} 0\,1\cdots0\,1 \xrightarrow[3]{} 0\,1\cdots0\,1$

~100%

양자 컴퓨터 후보들

- NMR on molecules in solution
- quantum dots on surface
- laser acting on floating ions in vaccum
- molecular magnets

양자 컴퓨터의 계산이론

- 사실: 양자컴퓨터는 확률적인 계산만한다.
- QP = 양자컴퓨터가 효과적으로 풀 수 있는 문제의 집합
- 추측: QP _ NP-완결 = {}
  - 즉, 양자컴퓨터는 NP-완결문제를 P-시간에 풀 수 는 없을게다
  - 양자컴퓨터 + 비선형연산자 라면 몰라도
- 사실: 양자컴퓨터때문에 계산가능한 함수가 더 늘지는 않는다.
  - 양자-계산가능 => 튜링-계산가능
  - 끝나요-문제는 양자컴퓨터로도 못 푼다
  - 처치-튜링 논제는 아직도 살아있다

양자 알고리즘 vs 확률적 알고리즘
quantum algm vs randomized algm

- 양자 알고리즘은 확률뿐 아니라 위상 phase까지 운용할 수 있다
- 확률: one-qbit state (a,b) has 0 with prob. $|a|^2$, or 1 with prob. $|b|^2$
- 위상: two one-qbit state (a,b) and (a,b) has the same prob. dist. but opposite phases.
- $\overline{a_1 + a_2 i} = a_1 - a_2 i$

양자계산 알고리즘 1
양자탐색 quantum search(1/2)

- data: (A,10), (B,11), (C,01), (D,00), unordered
- goal: search who is 01
- algorithm
  1. uniformly superpose 2 qbits such that every entry has prob ¼ with positive amplitude ½
  2. reverse phase: beam pulses to reverse matched entry's phase, from ½ to –½
  3. trim: beam pulses to set each entry's amplitude as the reverse difference from the average
     - amplitude ½ becomes (¼ − ¼ = 0)
     - amplitude –½ becomes (¼ + ¾ = 1)
  4. measure! 01 is read.

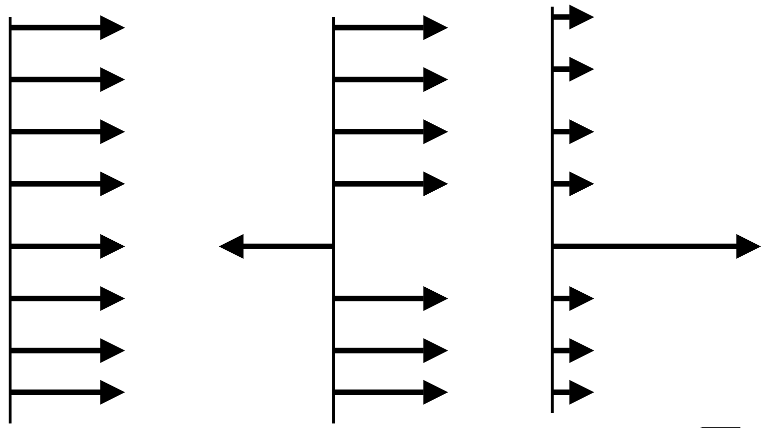
time complexity: we repeat steps 2-3 $O(\sqrt{N})$ times.

양자 탐색 quantum search(2/2)

suppose we search entry of 101

input qbits   amplitude $+\frac{1}{2\sqrt{2}}$

A 011
B 001
C 110
D 000
E 101
F 010
G 111
H 100



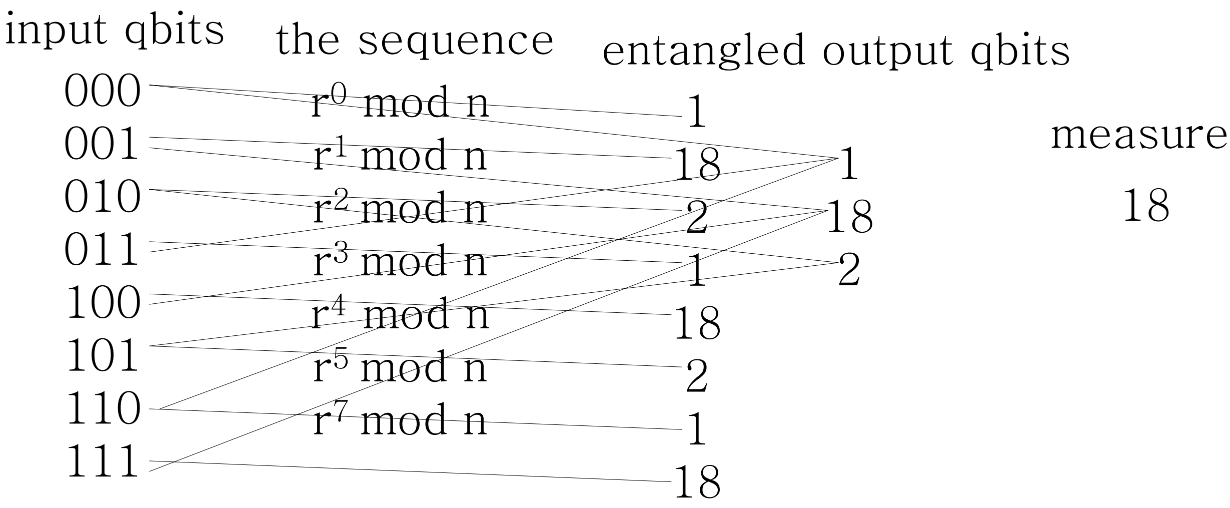
prob.1/8   (reverse phase ; trim) $\sqrt{N}$

양자계산 알고리즘 2
양자 인수분해(1/2)

- to factorize N: known in mathematics
  - choose a random r < N
  - r^1 mod N, r^2 mod N, r^3 mod N, ...
  - period length p of the above sequence
  - $\gcd(r^{p/2}+1, N)$, $\gcd(r^{p/2}-1, N)$ are prime factors with high prob.

N = 15, r = 7
7, 4, 13, 1, 7, 4, 13, 1, 7, 4, 13, 1, 7, ...
p = 4
$\gcd(7^2+1,15) = 5$, $\gcd(7^2-1,15) = 3$

양자 인수분해 (2/2)



001 get the period
100 3 then compute the gcd's
111
input after the measure

Quantum Programming Language 현재수준(1/2)

$$
\begin{array}{rcl}
C & ::= & \texttt{let bit } b \texttt{ = 0 in } C \\
& | & \texttt{let qbit } q \texttt{ = 0 in } C \\
& | & b = \texttt{0} \mid b = \texttt{1} \\
& | & q_1 \cdots q_n * = U \\
& | & \texttt{skip} \mid C; C \\
& | & \texttt{if } b \texttt{ then } C \texttt{ else } C \\
& | & \texttt{measure } q \texttt{ then } C \texttt{ else } C \\
& | & \texttt{while } b \texttt{ do } C
\end{array}
$$

from [Selinger 2003] with some touch

Quantum Programming Language 현재수준 (2/2)

- mathematical semantics: denotational
  - semantics of loops by limits in ordered space
- static type system
  - primitive, simple: Pascal-like
  - no compound data types

Language and Static Analysis Issues

- no compound/algebraic quantum data type yet
  - superposition of multiple list
  - qtype qlist = qNIL | qCONS of int * qlist
  - qCONS(2,qCONS(1,qNIL)) means the superposition of [], [1], and [1, 2].
- no high-level construct for the unitary transformation U yet
- need static checks for
  - is U unitary transformation?
  - any duplicate quantum data?
    - copying quantum data is impossible

자료

- *A Shortcut Through Time,* George Johnson, 2003
- "Towards a Quantum Programming Language", Peter Selinger, 2003
- "Quantum Programming in QCL", Bernhard Omer, 2000
- "Quantum Programming", Paolo Zuliani, 2001
- "Quantum computer", from Wikipedia
- "There's Plenty of Room at the Bottom", Richard Feynman, 1959
- "A fast quantum mechanical algorithm for database search", Lov Grover, 1996
- "Polynormial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer", Peter Shor, 1995
- 기타 인터넷 자료들